埼玉学園大学・川口短期大学　機関リポジトリ

Basic Cultivation of Practical Teaching Ability in Seminars on Teaching Practice

メタデータ	言語: jpn
	出版者:
	公開日: 2017-07-26
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 中込, 雄治, 長友, 大幸
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://saigaku.repo.nii.ac.jp/records/517

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.

教職実践演習において育成する
理数系分野の実践的指導力に関する研究

Basic Cultivation of Practical Teaching Ability in Seminars on Teaching Practice

中　込　雄　治・長　友　大　幸
NAKAKOMI, Yuji　NAGATOMO, Hiroyuki

Ⅰ．はじめに

2010年以降、大学に入学して教職課程を履修する学生には、「教職に関する科目」の１つとして「教職実践演習」という新設科目が必修となる。この新設科目の目的は、教員として必要な知識技能を習得したかどうかを確認することにある。本研究では、この「教職実践演習」の授業で確認する教科の指導力、特に理数系分野の実践的指導力の基礎に照準を絞り、学生に身に付けさせたい資質能力とそれを育成する教材について考察する。いま子ども達の理数系分野の学力向上に資する教員を養成することは、喫緊の課題である。ここでは、理数系分野の中でもとりわけ数学（算数）科における実践的指導力について論じることにする。[1)]

Ⅱ．数学科において育成したい実践的指導力

現在、多くの学生が「公式や解法を覚えることが数学の学習である」ととらえている実態がある。こうした硬直した数学観・学習観の及ぼす影響は大きく、そのままで教壇に立つと、勢い公式や解法を「教え込む」という数学（算数）の指導に終始しかねない危惧がある。しかし本来数学の学習とは、既習事項を関連付けて新たな数学的知識をつくり出す創造的な活動である。数学を創造的活動としてとらえるこうした数学観・学習観こそ、教職を目指す学生に身に付けさせたい資質能力である。このような数学観・学習観への転換を図るための教材としては、学生に多様な解法を引き出す数学的手法を獲得させる教材、コンパクトな体系をつくり出すという体験を積ませる教材などが考えられる。[2)]

本稿では、コンパクトな体系をつくり出す体験を積ませる教材として、異なる表現で「平行」を定義した場合におけるそれぞれの定義に基づいた定理の体系づくりを取り上げる。定義の仕方により、同じ定理でも証明方法が異なり、そこに別の体系ができる。定理の証明ができるまでの過程を追わせ、その証明で必要となる公理・定理をどのように体系立てていくかを具体的に確かめさせることによって、既習事項を関連付けて新たな数学的知識をつくり出す体験を積ませることができると考える。最後に、実際にこの教材を紹介した授業における学生の感想文を示し、その分析からこの教材の意義を確認する。

キーワード：教職実践演習、実践的指導力、平行
Key words ： seminars on teaching practice, practical teaching ability, parallelism

こうした教材によって学生の数学観・学習観の転換を図ることは、同時に教材観や指導方法などにも影響を及ぼし、将来においても教育現場で実践的指導力を向上させていくときの核となるものを形成することにつながると考えている。

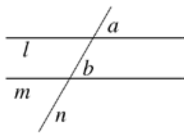
１．平行の定義

「平行」の定義を問うと、多くの学生は「交わらない２直線を平行と言う」と答える。確かに中学校の数学の教科書には「２直線AB,CDが交わらないとき、ABとCDは平行であるといい、AB//CDと表します」とある。[3)] しかし、小学校での算数の教科書における「平行」の定義は、次のようになっている。「１本の直線に垂直な２本の直線は、平行であるといいます」[4)] つまり中学校と小学校では、異なる表現で「平行」が定義されているのである。

ここでは、こうした異なる表現による定義に基づいて、定理の体系づくりを試みる。「平行」に関する異なる表現による定義としては、上記の２つの定義を含む次の４つの場合を考えることにする。

■定義①（平行）

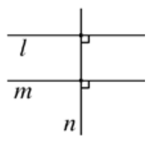
同一平面上において、１本の直線に等しい角度で交わる２直線は、平行であるという。
つまり図ⅰのように、直線nと２直線l,mのなす角$\angle a$、$\angle b$が、$\angle a=\angle b$であるとき、$l /\!/ m$である。



図ⅰ

■定義②（平行）

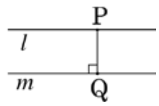
同一平面上において、１本の直線に垂直な２本の直線は、平行であるという。
つまり図ⅱのように、直線nと２直線l,mがあり、$n\perp l$かつ$n\perp m$であるとき、$l /\!/ m$である。



図ⅱ

■定義③（平行）

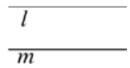
同一平面上にある２直線が常に一定の間隔を保っているとき、この２直線は平行であるという。
つまり図ⅲのように直線l,mがあり、直線l上の任意の点Pから直線mに下ろした垂線の長さPQが常に等しいとき、$l /\!/ m$である。



図ⅲ

■定義④（平行）

同一平面上にある２直線が共有点を持たないとき、この２直線は平行であるという。
つまり図ⅳのように直線l,mがあり、これらが交わらないとき、$l /\!/ m$である。



図ⅳ

定義①は同位角が等しいことを示しており、２直線が同一方向に伸びる直線であることに着目した定義となっている。定義②は同位角が直角となった場合で、定義①の特殊な場合を表現したものと言える。定義①と定義②を比べると、子どもにとっては定義②の方が具体的なイメージが湧きやすい。前述のように、実際に小学校では定義②が用いられている。

定義③は２直線の幅が常に一定であることに着目した定義であり、定義④は２直線がどこまで伸ばしても交わらないことに着目した定義である。前述のように、実際に中学校では定義④が用いられている。しかし、２直線がどこまで伸ばして交わらないというのは抽象的な表現であり、子どもにとって必ずしもわかりやすい定義とは言えない。むしろ定義③のように、常に間隔が一定である２直線と言った方が、子どもにとっては具体的なイメージが湧きやすく、わかりやすい場合もある。

2．平行線の錯角

次に、「平行線における錯角は等しい」ことを示した次の定理１に注目する。

【定理１】（平行線の錯角）

２本の平行線に１直線が交わってつくられる錯角は等しい。
つまり図１において、$l \mathbin{/\!/} m$ ならば、$\angle p = \angle q$

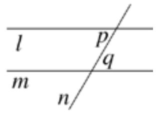


図１

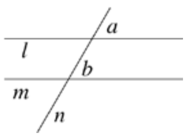
以下では、定義①から定義④をもとにした場合のそれぞれにおいて、上記の定理１（平行線の錯角）が、どのように導かれるかを検討していく。異なる表現で「平行」を定義することによって、定理１の証明の仕方もそれぞれ異なり、別の体系をつくることになる。

3．定義①（平行）による展開

まず、定義①を基にして、定理１（平行線の錯角）の証明を考えてみる。定義①を再確認する。

■定義①（平行）

同一平面上において、１本の直線に等しい角度で交わる２直線は、平行であるという。
つまり図ｉのように、直線nと２直線l, mのなす角$\angle a$、$\angle b$が、$\angle a = \angle b$であるとき、$l \mathbin{/\!/} m$である。



図ｉ

この定義①から、「同位角が等しければ平行である」と言える。ここで定理１（平行線の錯角）を証明するために、この定義①の逆「平行ならば同位角が等しい」を公理１として用意しておく。公理とは証明せずに認めるものである。

■公理１（平行線の同位角）

２本の平行な直線に１直線が交わってつくられる同位角は等しい。
つまり図１において、$l \mathbin{/\!/} m$ ならば、$\angle a = \angle b$

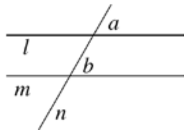


図１

この公理１より、図２において、$l \mathbin{/\!/} m$であれば$\angle r = \angle q$となる。したがって、$\angle p = \angle q$を言うためには、$\angle r = \angle p$であること示せばよいことになる。ここで$\angle r$と$\angle p$は対頂角であるから、さらに「対頂角が等しい」ことを定理として用意しておけば、定理１（平行線の錯角）の証明ができることになる。

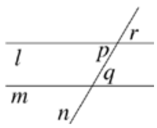


図２

「対頂角が等しい」ことを定理２として証明するが、そのためにまず平角を定義しておく。

■定義（平角）

角の２辺が重ならないで同一直線上にあるとき、この角を平角という。平角の角の大きさを180°とする。
つまり図３において、
$\angle APB = 180^\circ$

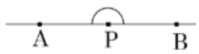
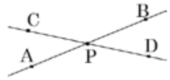


図３

【定理２】（対頂角）

対頂角は相等しい。
つまり図４において、
$\angle APC = \angle BPD$



［証明］

図４

図４において、平角の定義より、
$\angle CPD = 180^\circ$、$\angle APB = 180^\circ$
したがって、$\angle APC + \angle APD = 180^\circ$　①
$\angle BPD + \angle APD = 180^\circ$　②
①②より、$\angle APC = \angle BPD$

これで定理１（平行線の錯角）を証明する準備が整ったことになる。

【定理１】(平行線の錯角)

２本の平行線に１直線が交わってつくられる錯角は等しい。
つまり図５において、$l /\!/ m$ならば、$\angle p=\angle q$

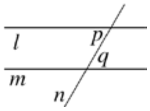


図５

[証明]

図６のように$\angle p$の対頂角を$\angle r$とする。

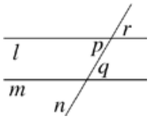


図６

$l /\!/ m$であるから、公理１（平行線の同位角）より、
$\angle q=\angle r$　①
定理２（対頂角）より、$\angle p=\angle r$　②
①②から、$\angle p=\angle q$

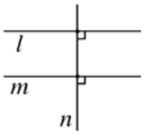
このとき定理１（平行線の錯角）は公理１（平行線の同位角）と定理２（対頂角）に支えられているので、これらの関連は、次のような関連図として表すことができる。

４．定義②（平行）による展開

次に、定義②を基にして、定理１（平行線の錯角）の証明を考えてみる。定義②を再確認する。

■定義②(平行)

同一平面上において、１本の直線に垂直な２本の直線は、平行であるという。
つまり図ⅱのように、直線nと２直線l,mがあり、$n\perp l$かつ$n\perp m$であるとき、$l /\!/ m$である。



図ⅱ

この定義②より、「同位角がともに直角ならば平行である」と言える、ここでも定理１を証明するために、その逆を次の公理２（平行線と垂直）として用意しておく。

■公理２(平行線と垂直)

２本の平行な直線のうちの１本と垂直に交わる直線は、もう１本とも垂直に交わる。
つまり図１において、$l /\!/ m$かつ$n\perp l$ならば、$n\perp m$である。

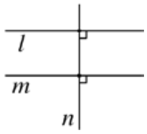


図１

この公理２より、図２において、$l /\!/ m$、$k\perp l$であれば$k\perp m$であることになる。$\angle p=\angle q$を言うためには、$\angle q=\angle r$と$\angle r=\angle p$が示せればよいが、$\angle q=\angle r$の方は定理２（対頂角）で示すことができる。問題は、$\angle r=\angle p$をどうやって示すかである。（ここでは、定義①のところで用意した公理１は使わない展開を考える。）

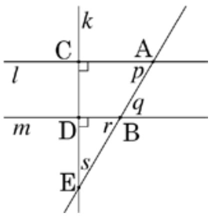


図２

このとき、図２の△ACEと△BDEはともに直角三角形であるから、もし「直角三角形の内角の和が180°である」ことが言えるとすれば、それを用いて、$\angle p+\angle s=90°$と$\angle r+\angle s=90°$を導き、これらの式から$\angle p=\angle q$を示すことができる。そこで、「直角三角形の内角の和が180°である」という定理を、平行線を使わずに証明することを考えてみる。

４つの内角がいずれも90°である四辺形を長方形と定義すれば、長方形の内角の和は90°

×4=360°となる。このとき長方形の対角線を一辺とする２つの直角三角形（図３のおける△ABD,△CDB）の合同を証明することができれば、360°÷2=180°から「直角三角形の内角の和が180°である」ことを示すことができる。

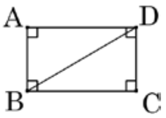


図３

そこで図３において、△ABD≡△CDBをどのように証明するかを考える。ここで、長方形の２組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しいことを公理とすれば、図４における２つの直角三角形（△ABD,△CDB）の合同は、三角形の合同条件二辺夾角によって示すことができる。

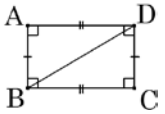


図４

上記の考え方を基に、まず三角形の合同条件二辺夾角を公理として押さえることにする。そのために、ここでは合同な多角形の作図方法に着目する。はじめに次の定義（多角形の合同）を確認しておく。

■定義（多角形の合同）--

対応する内角と辺がそれぞれ等しい多角形を合同であるという。
四辺形ABCDと四辺形A'B'C'D'が合同のとき、
四辺形ABCD≡四辺形A'B'C'D　と表す。

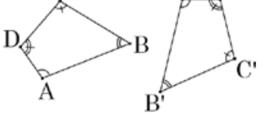


図５

ここで合同な多角形の作図方法を考えてみる。四角形ABCDと合同な四角形A'B'C'D'を作図するときには、

辺AB→∠B→辺BC→∠C→辺CD

の順に

辺A'B'→∠B'→辺B'C'→∠C'→辺C'D'

というように、辺の長さと角の大きさを等しくとっていくと、最後の辺とその両端の角の大きさは自動的に決まり、合同な四角形A'B'C'D'が作図される。△ABCと合同な△A'B'C'を作図するときも同様に、

辺AB→∠B→辺BC

の順に

辺A'B'→∠B'→辺B'C'

というように、２つの辺の長さと１つの角の大きさを等しくとっていくと、最後の辺とその両端の角の大きさは自動的に決まり、合同な△A'B'C'が作図される。つまり二辺夾角を対応させることにより、合同な三角形を作図することができる。そこでこの二辺夾角を三角形の合同条件として認め、次の公理３として用意する。

■公理３（二辺夾角）--

２つの三角形で１内角とそれを挟む２辺がそれぞれ等しいとき、これらの三角形は合同である。
つまり図６の△ABCと△DEFにおいて、
AB=DE, AC=DF, ∠A =∠Dならば、
△ABC≡△DEF

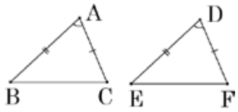


図６

次に長方形の定義を確認しておき、さらに「長方形の２組の向かい合う辺はそれぞれ等しい」ことを公理４（長方形）として用意しておく。この公理４と公理３（二辺夾角）をもとにして、直角三角形の内角の和に関する定理を、定理３として証明する。

■定義（長方形）

４つの内角がいずれも90°である四辺形を長方形という。

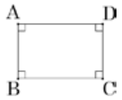


図７

■公理４（長方形）

長方形の２組の向かい合う辺はそれぞれ等しい。

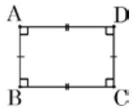


図８

【定理３】（直角三角形の内角の和）

△ABCは∠C=90°の直角三角形である。このとき
∠A+∠B+∠C=180°
である。

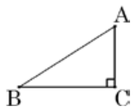


図９

［証明］

図９の△ABCに対して、図10のようにBC=EF, AC=GFとなる長方形DEFGをつくり、対角線EGを引く。

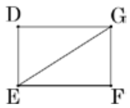
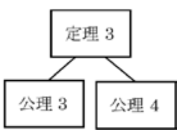


図10

このとき定義（長方形）より、∠F=90°
よって、△ABCと△GEFにおいて、
BC=EF、AC=GF、∠C=∠Fであるから、
公理３（二辺夾角）より、△ABC≡△GEF　①
また公理４（長方形）と定義（長方形）より、
EF=DG、GF=DE、∠D=90°　であるから、
△GEFと△EGDにおいて、
EF=GD、GF=ED、∠F=∠D　となるので、
公理３（二辺夾角）より、△GEF≡△EGD　②
長方形の内角の和は△GEFと△EGDの内角の和に一致するが、②より、長方形の内角の和の半分が△GEFの内角の和と一致することになる。
定義(長方形)より、長方形の内角の和は90°×４つまり360°となるので、△GEFの内角の和はその半分の180°である。
よって、①より、△ABCの内角の和も180°となる。
したがって、∠A+∠B+∠C=180°である。

定理３の関連図は、次のようになる。



これで、定義②を基にして定理１（平行線の錯角）の証明を行う準備が整った。

【定理１】（平行線の錯角）

２本の平行線に１直線が交わってつくられる錯角は等しい。
つまり図11において、$l \parallel m$ ならば、$\angle p=\angle q$

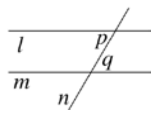


図11

［証明］

図12のように直線lに垂直な直線kとを引くと、$l \parallel m$であるから公理２（平行と垂直）より、直線kは直線mとも垂直となる。

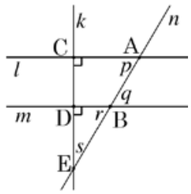
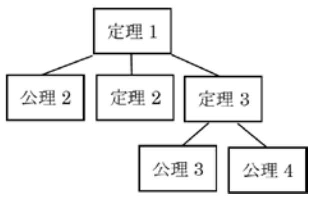


図12

したがって、△ACEと△BDEはともに∠ACEと∠BDEを90°とする直角三角形である。
よって△ACEと△BDEにおいて、
定理３（直角三角形の内角の和）から、
∠ACE+$\angle p$+$\angle s$=180°　①
∠BDE+$\angle r$+$\angle s$=180°　②　　となる。
このとき、∠ACE=90°、∠BDE=90°であるので、
①②から、$\angle p=\angle r$　③
また、$\angle q$と$\angle r$は対頂角なので、定理２（対頂角）から、
$\angle q=\angle r$　④
ゆえに、③④より、$\angle p=\angle q$

このとき定理１（平行線の錯角）の関連図は、次のようになる。定理１の証明で直接使用したのは公理２と定理２と定理３だけであるが、定理３は公理３と公理４に支えられている。

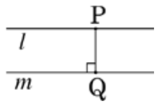


5．定義③（平行）による展開

続いて、定義③を基にして、定理１（平行線の錯角）の証明を考えてみる。定義③を再確認する。

■定義③（平行）

同一平面上にある２直線が常に一定の間隔を保っているとき、この２直線は平行であるという。
つまり図iiiのように直線l,mがあり、直線l上の任意の点Pから直線mに下ろした垂線の長さPQが常に等しいとき、$l \parallel m$である。



図iii

この定義③を基にすると、図１において、△BCDは直角三角形なので定理３（直角三角形の内角の和）から、$\angle q + \angle r = 90°$ ①であることが言えるので、あと∠CDA=90°であることが示せれば、$\angle p + \angle r = 90°$ ②となり、よってこの①②の２つの式から、$\angle p = \angle q$が言える。（ここでは、定義①定義②で用意した公理１公理２は使わない展開を考える。）

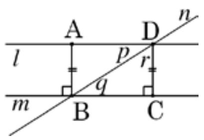


図１

ここで、∠CDA=90°、つまり四角形ABCDが長方形であることをどのように示すかが問題となる。すなわち、図２のような四角形ABCDにおいて、∠B=90°、∠C=90°、AB=DCであるとき、∠A=90°、∠D=90°であることを示すにはどうしたらよいかという問題である。

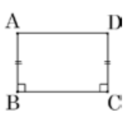


図２

このとき「四角形の内角の和が360°である」ことと、「∠A=∠Dである」ことが示せれば、∠A=90°、∠D=90°が言える。この「四角形の内角の和が360°である」ことは、「三角形の内角の和が180°である」ことから示すことができる。また「∠A=∠Dである」ことを示すためには、例えば図３において、△ABD≡△DCAが言えればよく、ことのきの合同条件を三辺相等と考えると、AC=DBが示せるかどうかが鍵となる。

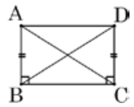


図３

AC=DBを示すには、△ABC≡△DCBが証明できればよいが、これは仮定のAB=DC, ∠B=∠Cと、BCが共通であることとを用いて合同条件二辺夾角によって証明できそうである。[5)]

こうした見通しのもとに、定義③を基にして定理１（平行線の錯角）を証明するための準備を整える。まず「三角形の内角の和が180°である」ことを定理４として証明しておく。この証明には平行線を使うことができないので、定理３（直角三角形の内角の和）を用いて証明する。

【定理４】（三角形の内角の和）

三角形の内角の和は180°である。
つまり図４において、
$\angle a + \angle b + \angle c = 180°$

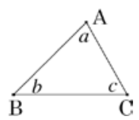


図４

［証明］（三辺の中で一番長い辺をBCとする。）
点Aから辺BCに垂線ADを引く。図５のようにADによって$\angle a$が分割された部分を$\angle d$、$\angle e$とする。

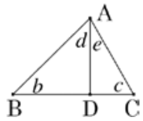
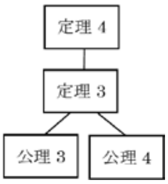


図５

△ABDと△ACDはともに直角三角形であるから、定理３（直角三角形の内角の和）より、それぞれの内角の和は180°となる。
したがって直角の部分を除くと、

$\angle d+\angle b=90^\circ$、$\angle e+\angle c=90^\circ$
よって、$\angle d+\angle e+\angle b+\angle c=180^\circ$　①
ここで、$\angle a=\angle d+\angle e$　②
であるから、①②より、$\angle a+\angle b+\angle c=180^\circ$

定理４の関連図は、次のようになる。



次に三角形の合同条件三辺相等を定理として証明するが、そのための準備として、定理５（二等辺三角形の底辺）と定理６（２組の辺が等しい四辺形）を用意しておく。

【定理５】（二等辺三角形の底角）
△ABCはAB=ACとなる二等辺三角形である。このとき∠B=∠Cである。

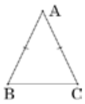


図６

［証明］
図７のように∠BACの二等分線ADを引く。①

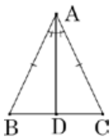


図７

△ABDと△ACDにおいて、仮定より、AB=AC
①より、∠BAD=∠CAD　また、ADは共通
よって、公理３（二辺夾角）より、△ABD≡△ACD
したがって、∠B=∠C

定理５の関連図は、次のように表せる。

【定理６】（２組の辺が等しい四辺形）
四辺形ABCDで、AD=AB、CD=CB
である。
このとき△DAC≡△BAC
である。

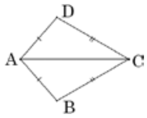


図８

［証明］
図９のように対角線BDを引く。

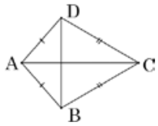
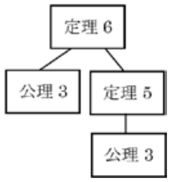


図９

△ABDと△CBDは、
仮定よりAD=AB, CD=CBであるから、
ともに二等辺三角形となる。
よって、定理５（二等辺三角形の底角）より、
∠ADB=∠ABD　①、∠CDB=∠CBD　②
ここで、∠ADC=∠ADB+∠CDB　③
∠ABC=∠ABD+∠CBD　④
であるから、①②③④より、∠ADC=∠ABC　⑤
△DACと△BACにおいて、
仮定より、AD=AB,　CD=CB　⑤より、∠ADC=∠ABC
したがって、公理３（二辺夾角）より、△DAC≡△BAC

定理６の関連図は、次のようになる。



【定理７】（三辺）
△ABCと△DEFにおいて、AB=DE, BC=EF, CA=FD
ならば、△ABC≡△DEFである。

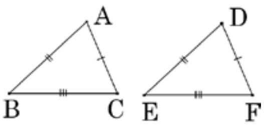


図10

［証明］
図11のように、辺BCと辺EFが重なるように△DEFを裏返して移動させる。

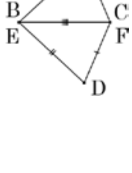
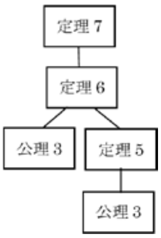


図11

四辺形ABDCに着目すると、
仮定より、AB=DB、CA=CD　となるから、
定理６（２組の辺が等しい四辺形）より、
△ABC≡△DBC
したがって、△ABC≡△DEF

定理７の関連図は、次のようになる。



続いて定理１（平行線の錯角）の証明に直接用いる定理として、次の定理８（２直角と２辺）を用意しておく。

【定理８】（２直角と２辺）------------------------------------
図12のように、四角形ABCDにおいて、
AB=CD、∠B=90°、∠C=90°
であるとき、
∠A=90°、∠D=90°　である。

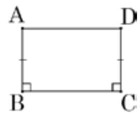


図12

［証明］
図13のように対角線AC、DBを引く。

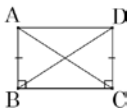
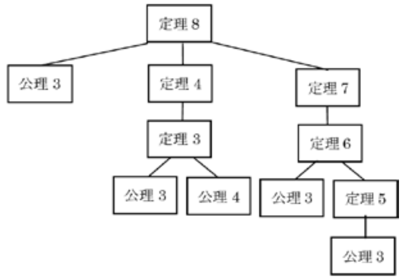


図13

△ABCと△DCBにおいて、BCは共通、
仮定より、AB=DC、∠B=∠C
よって、公理３（二辺夾角）より、△ABC≡△DCB
したがって、AC=DB　①
△ABDと△DCAにおいて、ADは共通、
仮定より、AB=DC、①より、AC=DB
よって、定理７（三辺）より、△ABD≡△DCA
したがって、∠BAD=∠CDA　②
四角形ABCDの内角の和は、△ABCと△ADCの内角の和に一致し、三角形の内角の和は定理４（三角形の内角の和）より180°であるから、
∠BAD+∠ABC+∠DCB+∠CDA=180°×2
仮定より、∠ABC=90°、∠DCB=90°
したがって、∠BAD+∠CDA=180°　③
②③より、∠BAD=90°、∠CDA=90°

定理８の関連図は、次のようになる。



これで、定義③（平行）を基にして定理１（平行線の錯角）の証明を行う準備が整った。定理１の証明は次のようになる。

【定理１】（平行線の錯角）--------------------------------------
２本の平行線に１直線が交わってつくられる錯角は等しい。
つまり図14において、$l \parallel m$ならば、$\angle p=\angle q$

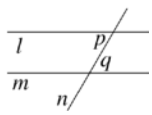


図14

［証明］
図15のように、直線l, nの交点Dから直線mへ垂線を下ろしその足をCとし、直線m,nの交点Bに垂線を立て直線lとの交点をAとする。∠BDCを$\angle r$とする。

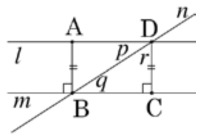
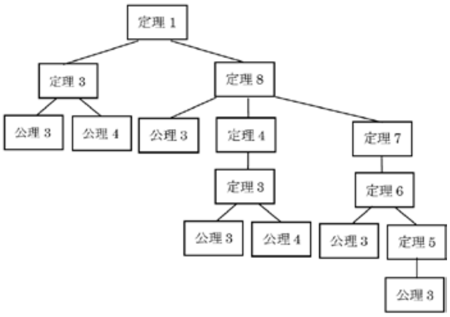


図15

$l \parallel m$であるから定義③（平行）より、AB=DC　①
仮定より、∠DCB=90°、∠ABC=90°　②
①②から、定理８（２直角と２辺）より、∠ADC=90°
したがって、$\angle p+\angle r=90°$　③
△BCDは直角三角形なので、定理３（直角三角形の内角の和）より、$\angle q+\angle r=90°$　④
③④から、$\angle p=\angle q$

このとき定理１の関連図は、次のようになる。



6．定義④（平行）による展開

最後に、定義④を基にして、定理1（平行線の錯角）の証明を考える。定義④を再確認する。

■定義④（平行）

同一平面上にある２直線が共有点を持たないとき、この２直線は平行であるという。
つまり図ivのように直線l,mがあり、これらが交わらないとき、$l /\!/ m$である。

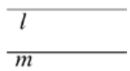


図 iv

定義④に基づいて定理1を証明するために、次の公理５（同側内角の和）を用意しておく。

■公理５（同側内角の和）

異なる３直線があり、１直線が残りの２直線に交わってなす同側内角の和が平角より小さいならば、この２直線はその同側内角の側において交点を持つ。
つまり図１において、$\angle ABC+\angle DCB<180°$　ならば、直線nに対して点A、D側で直線l,mの交点Pが存在する。

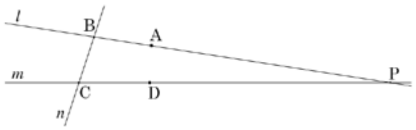


図 1

では、この公理５（同側内角の和）を用いて定理1（平行線の錯角）を証明してみる。[6)]

【定理１】（平行線の錯角）

２本の平行線に１直線が交わってつくられる錯角は等しい。
つまり図２において、$l /\!/ m$ならば、$\angle p=\angle q$

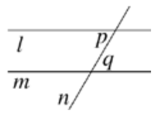


図 2

［証明］

図３のように直線l,m 上に点A, B, C, D, E, Fをとり、$\angle$CBEを$\angle r$とする。

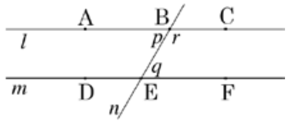


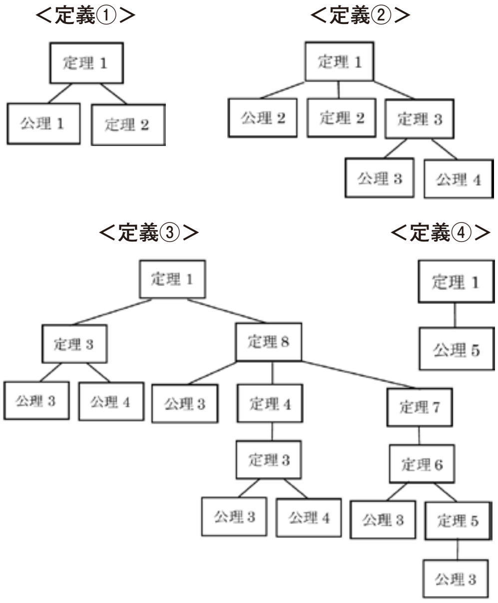
図 3

$l /\!/ m$のとき、$\angle p$と$\angle q$の関係は、
$\angle p=\angle q$、$\angle p>\angle q$、$\angle p<\angle q$　のいずれかである。
$\angle p>\angle q$　①　のとき、
$\angle$ABCは平角で180°であるから、$\angle p+\angle r=180°$　②
①②より、$\angle q+\angle r<180°$
よって、同側内角の和が平角より小さいことから、公理５（同側内角の和）より、直線l,m は点C、Fの側で交点を持つことになり、$l /\!/ m$に矛盾する。
$\angle p<\angle q$　のときも同様に考えることができ、直線l,m は点A,Dの側で交点を持つことになり、$l /\!/ m$に矛盾する。
したがって、$\angle p=\angle q$

このとき定理１の関連図は、次のようになる。

7．関連図の比較

定理１（平行線と錯角）において、定義①②③④のそれぞれをもとにした証明を確認したが、それらの関連図を比較してみると、既習事項を関連付けながらそれぞれが異なる体系で成り立っていることがよくわかる。



このように異なった体系が存在すること、また何に着目するかによって別の体系がつくり出せること、こうしたことを踏まえて教師自身が幾何学の指導内容を自ら組み立てていける力量を高めておくことが大切である。

8．学生の感想

教職を希望する学生が多く履修する「算数」の授業において、実際にこの教材を紹介する形で取り上げてみた。[7]以下（A ～ K）は学生の感想文の一部である。

A．異なる定義によって、一つの定理が様々に証明でき、改めて数学のすごさを感じた。

B．子どもの発達段階によって、どのような定義が適しているかを判断することは重要である。子どもが混乱しているとき、証明をしっかりしてあげることで、安心するのではないだろうか。

C．自分で実際に証明することが大事だと思った。

D．自分で定義と定理を組み合わせて証明するのはすごいと思った。

E．たくさんの定義があり、子どもの考えたことに教師が対応していけそうだと思った。定義がたくさんある分、たくさんの視点から証明できることを学んだ。

F．定義は一つだけではなく、何を定義とするかで証明などが変わってくることが分かった。

G．定義は一つしかないと思っていたので、一つだけではないことに驚きを感じた。

H．小学校でやる内容なのに、大学生でやっと理解できるような深いところまで意味が存在していて驚いた。

I．平行線の錯角が等しいことを求める方法は、定義によって求め方が変わってくることがわかった。子どもの年齢に合わせて、どの方法が適切なのかを知っておく必要があると思った。

J．定義を一つに絞らないで広く見ることで、子どものレベルにあった、様々な教え方が出来ると思った。

K．最初定義④が一番分かりやすいと思ったが、定義②が最終的には一番分かりやすいと思った。

A、D、F、G、I の感想から、異なる表現による定義をもとに、同じ定理が異なる体系でつくられていくことに対する驚きが読み取れる。またC、E、F、G、H の感想から、証明の重要性や広い視点を持つことの大切さに気付いた様子が読み取れる。これらの感想は数学のとらえ方にかかわるものであり、数学観・学習観の転換につながる反応と見ることができる。さらに、B、I、J の感想から、子ども

に対する指導の観点から教材をとらえようとする姿勢がうかがえ、教材観や指導方法にも影響を与えていることが読み取れる。

Ⅲ．おわりに

本研究では、数学を創造的な活動としてとらえさせるための教材として、コンパクトな体系をつくり出す体験を積ませる教材を考えた。感想文の分析から、こうした教材は学生の数学観・学習観に変化をもたらすとともに、同時に教材観や指導方法などにも影響を及ぼし、学生が将来実践的指導力を向上させていくときの核となるものを育成する上で有効であることが確認できた。

今後もさらに教職を志望する学生の実践的指導力向上を目指して、教材開発を行っていきたいと考えている。

なお、本研究を進めるにあたっては、横地清氏（北京師範大学客員教授）、菊池乙夫氏（算数・数学教育研究者）、黒木伸明氏（上越教育大学名誉教授）から多くの示唆をいただいた。

また、本研究は平成23年度共同研究費助成による研究課題「教職実践演習において育成する理数系分野の実践的指導力に関する研究」により、行ったものである。

[注]

1）「教職実践演習」に関するこれまでの研究に関しては以下を参照。
長友大幸・中込雄治・生野金三、教職実践演習の実証的研究、埼玉学園大学紀要人間学部篇第10号、2010年、pp.179-190

2）多様な解法を引き出す数学的手法に関しては以下を参照。
中込雄治、多様な解法を引き出す算数教材の研究、埼玉学園大学紀要人間学部篇第10号、2010年、pp.165-178
中込雄治、数学的手法の意識化を図る教材開発について、埼玉学園大学紀要人間学部篇第９号、2009年、pp.299-304

3）未来へひろがる数学１、啓林館、p.108、平成22年２月10日発行

4）新しい算数4上、東京書籍、p.56、平成23年２月10日発行

5）定義③（平行）による展開は次の参考文献による。
横地清編、現代算数・数学講座１図形・幾何の体系化と実践、ぎょうせい、1983年、pp.1-10。

6）ここでの公理５（同側内角の和）及び定理１（平行線の錯角）とその証明は、ユークリッド原論第１巻に公準５と命題29としてある。
中村幸四郎・寺阪英孝、伊東俊太郎、池田美恵訳、ユークリッド原論、共立出版、1971年、p.２、pp.21-22

7）この「算数」の授業は2011年６月に２・３年生計22人を対象に実施した。