Cobb-Douglas Production Function : Application of Product Line Development

コブ-ダグラス生産関数
— プロダクトライン開発への適用 —

Cobb-Douglas Production Function
— Application of Product Line Development —

永　嶋　　浩
NAGASHIMA, Hiroshi

1．はじめに

経済活動における生産者行動は財を生産する経済主体を形成している。図１に示すように生産には生産要素が生産の投入量として関わり、無駄のない技術が施されて最大の財の生産量の関係を示す式(1)の生産関数（Production Function）で把握される。一般に複数の生産要素の投入量を独立変数、財の生産量を従属変数と呼ぶ。このような入出力関係を相関（correlation）と回帰（regression）の関係を調べる統計解析の観点から見ると、それぞれに観測対象の入力側における原因を説明変数、出力側における結果を目的変数にして扱うことができる。

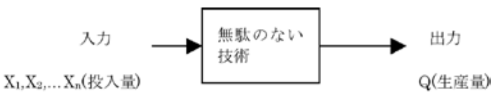

図１　投入量と生産量の関係

$$Q = f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad (1)$$

生産関数は1928年にアマースト大学の数学者Charles W.Cobbとシカゴ大学の経済学者Paul H.Douglasが発表した「A Theory of Production」の論文の中で記したコブ-ダグラス生産関数（Cobb-Douglas production function）が広く知られ各分野で応用されている。しかしコブ-ダグラス生産関数の元になる関数は1894年の時点でPhilip H. Wicksteedが「An Essay on the Coordination of the Laws of Distribution」の論文の中で発表済みの状況にもあり、この関数型は式(2)のような多変量解析のできる多変数関数の様相を呈している。

$$P = f(a, b, c, \cdots) \qquad (2)$$

全生産物に対する労働と資本の経済理論を考えていたDouglasは、米国の製造業の実態の中から生産関数を導く。それは友人の数学者Cobbへ数式的モデルの問い合わせをしたことの議論から生まれる。Cobbはホモセティック（homothetic:相似拡大的）な性質を表現できる一次同次関数やオイラーの公式等の活用を提案し、初期のコブ-ダグラス生産関数が式(3)の形で完成する。

$$P = bL^k C^{1-k} \qquad (3)$$

コブ-ダグラス生産関数の発表後10年余り経過した頃、David Durandによって規模に関して収穫一定（constant returns to scale）を含

キーワード：プロダクトライン、コスト評価、ミクロ経済学、ベキ関数
Key words　：Product Line, Cost Estimation, Microeconomics, Power Function

意した関係の式(4)が提案され、この形の式でDouglasらも実証検証を行い、現在ではコブ-ダグラス生産関数を代表する式として取り扱われている。

$$P = bL^k C^j \qquad k + j = 1 \qquad (4)$$

このような経過をたどったコブ-ダグラス生産関数であるが、本稿では、プロダクトライン開発におけるコスト評価に対しての導入をはかり、その有効性や問題点を考察する。

先ずコブ-ダグラス生産関数そのものの有している特徴や性質を、その関数の導出に用いたデータを再度統計的に処理することから検証を行う。本来ならばこの種の議論では対象外である因子分析という手法を新たな視点で捉え、コブ-ダグラス生産関数の議論の中へ組込みその展開を試みる。そのうえで式(4)に見られるベキ関数のベキ乗の意味をミクロエコノミックスの観点から論じる。これらの中心となるベキ関数はいろいろな分野に適用されている。例えばプロジェクトのコスト見積りを扱うときの規模と工数の関係式、感覚現象を扱うときの心理量と物理量の関係式等に使われている。さらにホモセティックな性質には、温度が一定に保たれるときの圧力×体積が一定という有名なボイルの法則があげられる。これらの関係も参考にしながらプロダクトライン開発へ導入するコブ-ダグラス生産関数を考える。

2．コブ-ダグラス生産関数

CobbとDouglasによるコブ-ダグラス生産関数の導出には、表１に示す米国の1899年から1922年までの工業生産物指数等が用いられている[1]。内訳は製造業における減価償却費を除く建物、機械、設備で構成した固定の資本（Capital)、就業者数×労働時間で求めた総労働時間の労働（L:Labor)、製造業生産数量の生産（P:Product）をそれぞれ指数化している。費用（Cost）を意味するCとの違いを明確にするため資本をKで表現し、指数のkとjに対してもそれぞれαとβを使うことにする。つまりPLKで表現されたコブ-ダグラス生産関数は、式(5)のようになる。

$$P = bL^{\alpha} K^{\beta} \qquad (5)$$

表１　生産関数導出用データ

年	P（生産）	L（労働）	K（資本）
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	118	122
1903	124	123	131
1904	122	116	138
1905	143	125	149
1906	152	133	163
1907	151	138	176
1908	126	121	185
1909	155	140	198
1910	159	144	208
1911	153	145	216
1912	177	152	226
1913	184	154	236
1914	169	149	244
1915	189	154	266
1916	225	182	298
1917	227	196	335
1918	223	200	366
1919	218	193	387
1920	231	193	407
1921	179	147	417
1922	240	161	431

過去にも統計データの解析によって変数間の関数関係は見出されている。経済分野においても製造業の統計データを見てDouglasらは精力的に何らかの関数関係を見出そうと試みていたものと推察する。そのような過程で先ずやるべきことは相関と回帰の検討になるのではないだろうか。

2.1　相関と回帰の視点

相関は変数間の規則的な関係の強さを示すものであり、散布図（scatter plot）の形で表現できる。回帰は説明変数が目的変数に及ぼす影響の度合いを見出すことができ、変数間の関数関係の予測を可能にすることができる。まずPLKの相関を調べてみることにする。L（労働）とK（資本）、P（生産）とK（資本）、P（生産）とL（労働）の散布図は、各図とも一部に外れ値の存在はあるが正の相関のイメージを形成している。図２に３次元散布図で表したPLKの相関を示す。

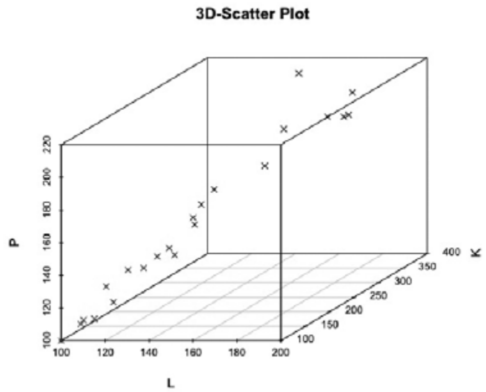

図２　PLKの相関

３次元散布図のピアソンの積率相関係数（γ）はγ=0.8559061になっている。さらに式(5)の対数をとって見方を変えると重回帰式(Multiple Regression Equation)で表せる。式(5)を対数変換してみる。式(5)は式(6)のような一次関数になり、式(7)に示すように誤差項εを加えると一般化線形型モデル(Generalized Linear Model）として扱えるようになる。yは従属変数（あるいは目的変数）、b0は定数項（あるいは切片）、αやβは係数、x_1、x_2は独立変数（あるいは説明変数）であり、各項の係数は最小二乗法や最尤法で推定することができる。

$$y = b_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 \qquad (6)$$

$$y = b_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \varepsilon \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix} y = \ln P \\ b_0 = \ln b \\ x_1 = \ln L \\ x_2 = \ln K \end{pmatrix}$$

ここで対数変換したPLKの数値のグラフを図３に示す。PLKの統計データは、図３からわかるように統計的な性質が時間とともに変化する非定常時系列になっている。このためPLKの統計データに差分の処理を施して図４に示すとともにそれらを自己回帰分析に活用し、予測可能なデータ系列をしているのかどうかをさらに確かめてみる。

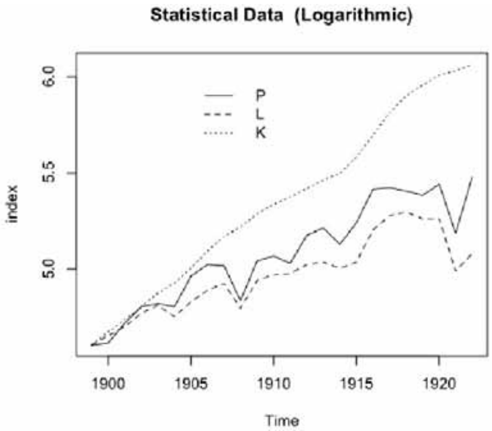

図３　PLKの統計データ（自然対数）

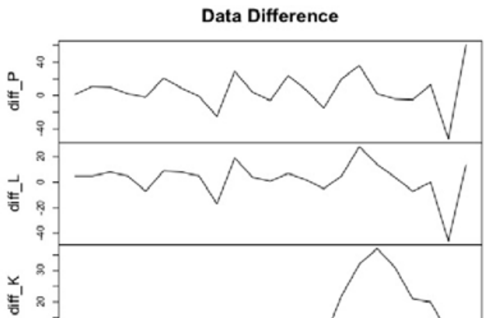

図４　PLKの差分表現

図４からわかることは、PとLに関しては1921年あたりに大きい変動があるものの定常時系列で扱えるデータ系列をしている。Kに関しては1915年以降5年間に定常時系列では扱えないデータ系列が存在している。このような性質を持つPLKの統計データのうちPに対して1915年から1922年までを最小二乗法でデータ予測してみる。その結果を図５に実線で実測値を示し、点線で予測値を示す。1915年から5年間に関しては過去の実測値を分析すると、ある程度の予測ができているのがわかる。

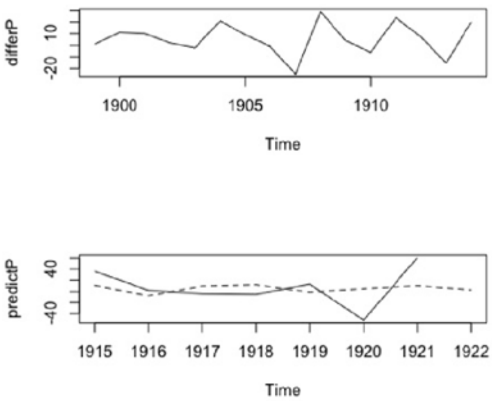

図５　Pの自己回帰分析

2.2　因子分析の視点

コブ-ダグラス生産関数は、２つの説明変数と１つの目的変数の関係式を示している。このような関係の多変量解析では重回帰分析の手法が一般にとられる。ここで見方を変えて目的変数が無く、説明変数が３つあると捉えてみる。このような関係の多変量解析は、因子分析の手法が適用できる。因子分析はm個の検体とn個の観測変数（ここでは説明変数が該当）がm>nの関係のとき、各々の観測変数がk個の共通因子と独自因子（誤差扱い因子）の線形結合で表現され、共通因子はk<nの関係で見出すことができる。コブ-ダグラス生産関数に因子分析を施すためには、現状の３つの観測変数のままでは１つの因子しか抽出できず、プログラムの開発環境によってはエラー扱いになってしまう[2]。そのため少なくとも２つの因子を抽出してコブ-ダグラス生産関数の特徴把握を試みる必要がある。ここではニュー・サウス・ウェールズの製造業労働者の実質所得と価値限界生産力を追加の観測変数にして扱う[3]。追加の観測変数も含めてコブ-ダグラス生産関数を導出した1899年から1922年のデータは、下記枠内のような手順で加工し準備する。

５つの観測変数に対して22検体を対象に因子数を２、因子軸回転をバリマックス回転に設定して因子分析する。第１因子を見出す因子負荷量のしきい値を0.8にした場合、第１因子にはLとPの絡む生産性の関係が存在するのがわかる。つまり生産は労働の支配を受けることを示している。

第２因子を見出す因子負荷量のしきい値を0.6にした場合、第２因子にはIとKの絡む賃金の関係が存在するのがわかる。つまり企業規模が大きいほど高い所得水準が得られることを示している。ここで因子負荷量のしきい値を変えて別な見方で因子を見出してみる。第１因子を見出す因子負荷量のしきい値を0.6にした場合、第１因子にはLとPとKの絡む生産性の関係が存在するのがわかる。これがまさにコブ・ダグラス生産関数の生産における労働の割合と資本の割合の寄与率に相当している。第２因子を見出す因子負荷量のしきい値を0.5にした場合、第2因子にはIとKとPの絡む賃金の関係が存在するのがわかる。つまり所得分配は、会社規模と生産力の支配

を受けることになる。

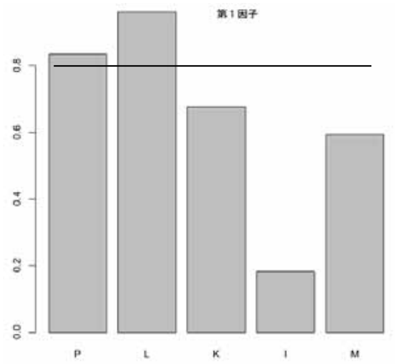

図６　第１因子の構造

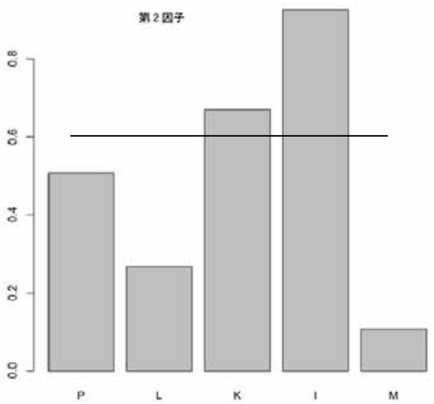

図７　第２因子の構造

探索的因子分析（exploratory factor analysis）と呼ばれる図６、図７に示したような因子分析では、因子間の因果関係までは推測できない。しかも観測変数間の関係を把握しようとしても共通因子を介してのみの把握になってしまう。

１.1901年のP（生産）を100に換算し、1922年までの生産物指数を再計算して求める ２.同様にL（労働）とK（資本）に対しても再計算して求める ３.1901年のI（所得）を100に換算し、1922年までの実質所得を再計算して求める ４.同様にM（限界）に対しても価値限界生産力を再計算して求める 注：ニュー・サウス・ウェールズ(1914年)の欠損データは前後のデータの平均値で与えておく

そのため仮説検証のできる確証的因子分析（confirmatory factor analysis）をコブ-ダグラス生産関数に適用して因子分析の裏付けをすることもできる。具体的には潜在変数間の構造方程式モデル、観測変数間を分散共分散行列で表したデータ行列等を用意し、それらと観測変数の検体数をsem（）の引数にして実行する。図８にその実行例を示す。今回プログラム開発にはRのsemパッケージを用いてF1-F2の構造式モデルを生成している。その他にも同様の計算機能を有している統計解析ツールにはSPSSのAMOSなどがある。

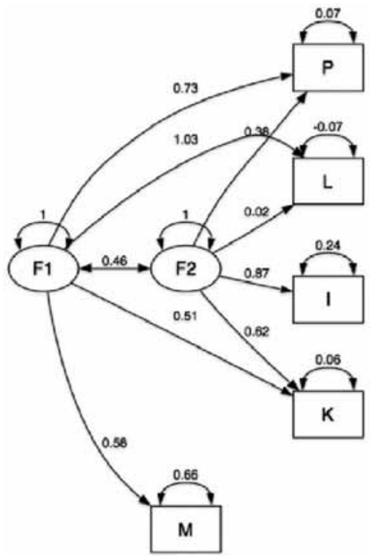

図８　F1-F2の構造式モデル

２.３　実測値と理論値のデータ

式(5)に α =0.75と β =0.25を設定して理論値を求めるとともに実測値（actualP）との関係を表２に示す。但し、理論値P（theoryP）はb=1.01とした条件のもと式(8)を使う。

$$P = bL^{0.75}K^{0.25} \qquad (8)$$

actualPとtheoryPの相関係数 γ は、ピアソ

ン（Pearson）の積率相関係数で求める。ここでは γ =0.9704615が得られ、信頼区間は［0.9318769,0.9873352］の範囲にあり強い相関のあることがわかる。

表２ Pに関する実測値と理論値

年	theoryP	actualP
1899	101.000	100
1900	106.551	101
1901	112.097	112
1902	120.177	122
1903	126.203	124
1904	122.359	122
1905	131.917	143
1906	141.337	152
1907	148.118	151
1908	135.895	126
1909	154.200	155
1910	159.444	159
1911	161.793	153
1912	169.524	177
1913	173.057	184
1914	170.239	169
1915	178.313	189
1916	207.936	225
1917	226.347	227
1918	234.944	223
1919	231.962	218
1920	234.903	231
1921	192.683	179
1922	207.998	240

さらにactualPとtheoryPを多群間のデータセットと捉えて一元配置分散分析を試み、各群を図９の箱ひげ図で表してみる。但し、一般には一元配置分散分析の対象は母集団が正規分布であることを前提にしている。このためどの程度厳密に群間を把握できるかは疑問の残る所でもある。

まずヒストグラムを考える。actualPもtheoryPも正規分布の形状はしていない。さらにシャピロウ-ウィルク（Shapiro-Wilk）検定を実施すると、p値が0.05より小さい0.01504であるため帰無仮説が棄却され、正規分布でない検定結果が示される。しかもクラスカル-ウォリス（Kruskal-Wallis）検定を行うと、p値が0.9918であり群間に差がないものと検定される。このような状況で箱ひげ図を描き、さらに同等性の検定を一元配置分散分析で実施する。一見すると箱ひげ図からは、actualPとtheoryPの間には差異がないように見える。しかし両者の詳細を調べるために年度毎にactualPとtheoryPの対応付けを行いaov（）関数で分散分析を実施する。得られた数値は、群間の差を表すPr（>F）値は0.7493であり、年度毎のactualPとtheoryP間の差を表すPr（>F）値は2e-16でありほとんどゼロに近い値になる。つまり群間には差がないものと認められ、年度毎のデータ間には差があるものと認められる結果が得られる。従ってコブ-ダグラス生産関数の実測値と理論値の群間には差がなく、年度毎のデータ間には差があることがわかる。パラメトリックな検定を適用するには、各群が等しい母分散をもつ正規分布に従うことが仮定されているが、コブ-ダグラス生産関数に関しては、正規分布の仮定がくずれている。さらにもう１つの仮定でもある各群の母分散が等しいかどうかをバートレット（Bartlett）検定で調べてみると、0.05より大きいp値が0.882を示すため帰無仮説は棄却されない状況になっている。もし仮に帰無仮説が棄却された場合は、ノンパラメトリックな検定の採用が求められる。いま強制的にノンパラメトリックな検定であるラスカル-ウォリス（Kruskal-Wallis）検定を行うと、p値が0.9918であり群間には差がないものとの検定結果が得られる。これらいろいろな検定を実施したが、コブ-ダグラス生産関数の

実態を裏付けた結果となっている。

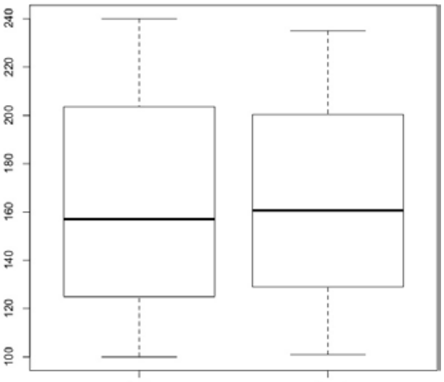

図９　actualPとtheoryPの比較

２.４　一次同次

生産規模が拡大していくときの生産要素の投入量と生産物の生産量の関係を生産関数の数式から把握する。そのためコブ-ダグラス生産関数の式(5)を式(9)のような表現で取り扱うことにする。さらにその式の生産要素をt倍にしたときの生産量がt^k倍になるk次同次関数（homogeneous function of degree k）の形の関数で考える。k次同次には$\alpha+\beta=k$の関係があり、これまでに知られていることは、生産量の値が逓増・逓減・一定のいずれかのケースにあてはめられることである。コブ-ダグラス生産関数は、当初から$k=1$のケースを前提にしており、投入量が２倍、３倍になれば生産量も２倍、３倍になり規模に関して収穫一定を意味している。

$$P = f(L,K) \qquad (9)$$

$k>1$のケースでは、投入量が２倍、３倍になれば生産量が２倍以上、３倍以上になり規模に関して収穫逓増を意味している。$k<1$のケースでは投入量が２倍、３倍になれば生産量が２倍以下、３倍以下になり規模に関して収穫逓減を意味している。特に$k=1$のケースの一次同次関数は、経済分野を問わず各方面で広く使われている。

k次同次を意味するパラメータkを$k=1$で扱ったケースのαとβについて考えてみる。従来からコブ-ダグラス生産関数で表現されているαとβの数値は、$\alpha=0.75$と$\beta=0.25$（あるいは$\alpha=0.7$と$\beta=0.3$、$\alpha=0.65$と$\beta=0.35$）の組み合わせがよく使われている[4]。これらの数値はいずれの場合も$\alpha+\beta=1$を満たしている。ここで表２の実測値データを使い、式(7)を$b_0=0$、$\varepsilon=0$とおいた重回帰モデルでαとβを求めてみる。計算結果は$\alpha=0.6$と$\beta=0.4$が得られ、得られた数値は、$\alpha+\beta=1$を満たしている。図10に示す構造方程式モデルのx1はL、x2はK、yはPに該当している。

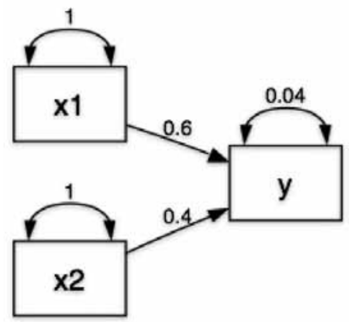

図10　構造方程式モデルの展開

３．生産の最適化

企業の経済活動において生産者は、一般に利潤（profit）を最大にするように計画を立てるものである。ここで生産者の行動が２種類の生産要素から１種類の財を生産するシステムに振り向けられているという前提に立って考える。利潤は、収入（revenue）から費用（cost）を引いた残りであり生産関数と費用関数の関係から導ける。費用関数は可変費用と固定費用の和で構成するものとし、この

ときの生産関数にはコブ-ダグラス生産関数を想定する。このような条件のもと利潤を考える上で重要な視点が生産の最適化である。この最適化を求めることが限界収入＝限界費用のときに利潤最大化をもたらしてくれる。さらに利潤最大化には費用最小化に着眼するアプローチのやり方もある。そこでは等量曲線(isoquant curve)と等費用線(isocost line)の接点を求めることにより最適投入を見出すものである。つまり生産関数に対しての技術的代替率（Rate of Technical Substitution）での把握が必要となる。

3.1　利潤最大化

生産物の価格p、生産物の生産量y、生産要素の価格をw_1、w_2、生産要素の量をx_1、x_2とした場合、収入はpyであり、費用は$w_1 x_1+ w_2 x_2$であり、固定費用Fを含めた総費用は$w_1 x_1+ w_2 x_2+F$となる。つまり利潤πは式(10)で表せる[5]。利潤を最大にするという考え方は、費用を最小にするという考え方に置き換えることもできる。

$$\pi = py - (w_1 x_1 + w_2 x_2) \qquad (10)$$

3.2　技術的代替率

生産関数には効用関数の無差別曲線に相当する等量曲線が存在する。効用関数では無差別曲線上の各点で代替可能な削減財と代償財の比、言い換えると無差別曲線上の各点での接線の傾きを限界代替率で定義している。同様に等量曲線でも曲線の各点での接線の傾きを技術的限界代替率(Marginal Rate of Technical Substitution)あるいは単に技術的代替率と呼び、MRTS又はRTSの名称で扱っている。第１要素が１単位減少したときに従来通りの生産量を維持するために第２要素を増加させる割合を表すMRTSは、生産関数を全微分して式(11)の左辺dyを０において求めることができる。しかも限界生産力（MP:marginal productivity）は、生産関数の偏微分で得られるためMRTSを式(12)のように表現することもできる[6]。

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \qquad (11)$$

$$MRTS = \frac{f_1}{f_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{MP_1}{MP_2} \qquad (12)$$

4．プロダクトライン開発

再利用の視点でシステムを開発するプロダクトライン開発は1992年にJohn GaffneyとBob Cruikshankらが提唱したROI計算式[7]からpayoff pointとROIとの関係をグラフで表すと図11のような表現になる。さらに本紀要９号の拙稿[8]で示した製品数とROIの関係式を一般化して扱うと、breakeven pointとROIとの関係を表すグラフは図12のような表現になる。これら２つのグラフから横軸にB（breakeven point)、縦軸にP（payoff point）を割り当て

図11　payoff pointとROIの関係

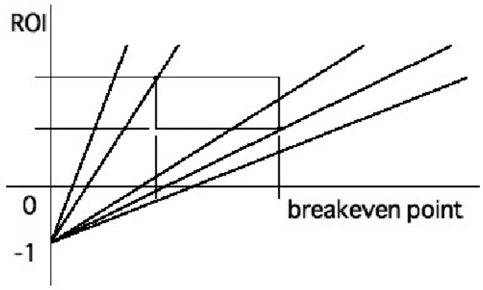

図12　breakeven pointとROIの関係

た関係式を求めると式(13)が得られる[9]。このグラフは図13に示す等量曲線で表される。式(13)の３次元グラフの表現例は図14のような形状をしている。

$$B\times P = k\ (k：Nに依存の定数) \quad (13)$$

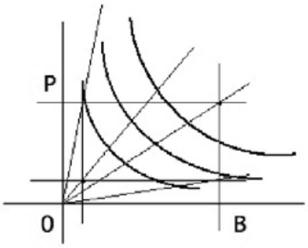

図13　BとPの関係

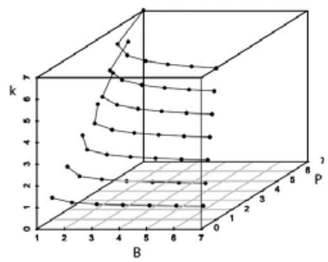

図14　B×P=kの関係

投資案件をかかえた生産者は３.で示したように、利潤を得るように生産計画を立てる。プロダクトライン開発でも同様に生産計画を立てるが、本稿では利潤の所をROIを用いた式(14)の評価法をとる。一般に投資案件の評価には投資利益率法、回収期間法、現在価値法などいろいろな方法がある。これら方法の中の投資利益率法が今回プロダクトライン開発で採用した評価法に該当する。

$$ROI = \frac{利益}{投資コスト} \quad (14)$$

4．1　投資案件の評価

プロダクトライン開発のコストには７つのコスト要素と従来型開発コストが関係するものとし、ラインにはn系列あるプロダクトを考える。ROI計算のために式(14)の分子の利益を従来型開発コストからプロダクトライン型開発コストを差し引いた値で表し、分母の投資コストを$C_{strategy}$と$C_{analysis}$で加算のIで表現する。図13の等量曲線をROI計算に使うため式(15)に１次同次性の生産関数N = F(B,P)を導入し、さらに右辺第２項にオイラーの公式を適用して式(16)を導く。但し、各コスト要素の変数添字には頭文字のみを付与して以下のように各変数を定義する。

R：ROI，N：製品数，I：投資コスト＝$C_{strategy} + C_{analysis}$
C_u：従来型開発によるコスト，$C_{u/I} = C_u/I$
C_p：プロダクトライン開発によるコスト，$C_{p/I} = C_p/I$
Σ（プロダクトライン開発によるコスト）をN＝Σで近似
$w_B = C_{p/I}\,F_1(B,P)$，$w_P = C_{p/I}\,F_2(B,P)$

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial B}, F_2 = \frac{\partial F}{\partial P}$$

$$ROI = \frac{\sum C_u}{I} - \left(1 + \frac{\sum\left(C_{un} + C_{re} + C_{pr} + C_{co} + C_{ex}\right)}{I}\right) \quad (15)$$

$$R = C_{u/I}\,F(B,P) - (w_B\,B + w_P\,P + 1) \quad (16)$$

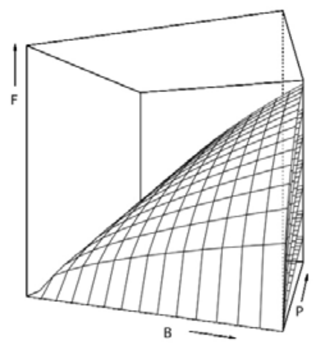

図15　生産関数の$\sqrt{BP}$群

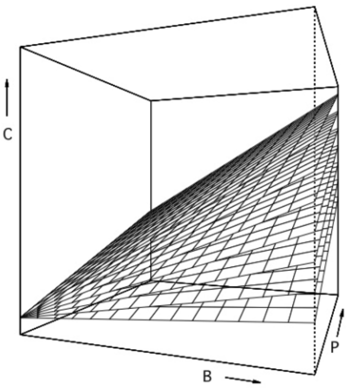

図16　費用関数の接平面群

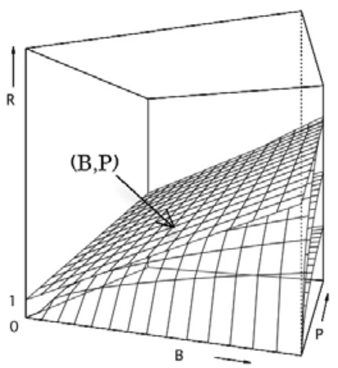

図17　費用関数の費用最小点

式(16)の右辺第１項は生産関数、右辺第２項は費用関数と捉え、生産関数がBPの平方式の形状を図15に示し、費用関数の接平面の形状を図16に示す。以上より等量曲線上の費用最小点は、図17に示すような費用最小を形成する(B,P)を把握しながら投資案件評価に用いる。費用最小化問題は式(17)で与える。

$$\min_{B,P}\ w_B B + w_P P + 1 \qquad (17)$$

$$s.t.\quad N_i = F(B,P)\ ,1 \le i \le n$$

４．２　生産関数の導入課題

一般にN = F(B,P)の生産関数を導入した場合には、$\alpha + \beta = 1$を前提とした１次同次性の関数を扱う。しかしプロダクトライン開発のコスト評価には、式(13)のところで示したように２次同次性を持つ関数を前提にしている。この違いから投資案件の評価をどのように捉え、どのように扱うべきか等の問題が提起される。

４.２.１　同次性の違い

１次同次な生産関数にBPの平方式$F(B,P) = \sqrt{BP}$を扱う。$\alpha + \beta = 1$の条件は$\alpha = 0.5$、$\beta = 0.5$で作り出すものとする。プロダクトライン開発では式(13)で示した２次同次な生産関数にBPの乗算式$F(B,P) = BP$を扱う。$\alpha + \beta = 2$は$\alpha = 1$、$\beta = 1$で作り出すものとする。１次同次の取扱いを例１に、２次同次の取扱いを例２に示す。つまり生産要素が各々t倍されると生産量が１次同次ではt倍になり、２次同次ではt^2倍になる。これらの結果だけからみると、生産関数は１次同次で対処しようが、２次同次で対処しようが生産量の値の差異だけを把握しておけばどちらで対処しても構わないということになる。

例１
$$\begin{aligned} F(tB,tP) &= \sqrt{(tB)(tP)} \\ &= \sqrt{t^2(BP)} \\ &= |t|\sqrt{BP} \\ &= t^1 F(B,P) \end{aligned}$$

例２
$$\begin{aligned} F(tB,tP) &= (tB)(tP) \\ &= t^2(BP) \\ &= t^2 F(B,P) \end{aligned}$$

４.２.２　弾力性の特性

等量曲線上で生産要素の価格比が１%変化したときに生産要素の投入量比が何%変化するかで定義した値は代替の弾力性（σ:elasticity of substitution）と呼ばれるが、コブ-ダグラス生産関数では１次同次や２次同次に関係なくその値は式(18)に示すように１になる。代替の弾力性は等量曲線の傾きが

ゆるやかなときは大になり、等量曲線の傾きが急峻であるときは小になる特性がある。

$$\sigma = -\frac{\dfrac{d(B/P)}{(B/P)}}{\dfrac{d(w_1/w_2)}{(w_1/w_2)}} = -\frac{d\log\dfrac{B}{P}}{d\log\dfrac{w_1}{w_2}} = \frac{d\log\dfrac{B}{P}}{d\log|MRTS|} = 1 \tag{18}$$

ここで1次同次や2次同次の限界生産力やMRTSを求めて両者を比較してみる。1次同次なBPの平方式と2次同次なBPの乗算式でそれぞれMPを計算して各々のMRTSを求めると式(19)に示すように同一の値が得られる。これらの結果から生産関数は1次同次で対処しようが、2次同次で対処しようがMRTSの値に差異はなく、次数はどちらで対処しても構わないということを示している。

$$MRTS = \frac{MP_B}{MP_P} = \frac{P}{B} \tag{19}$$

さらにMRTSの計算を一般化してみる。Bが1単位減少したときNが同じ値にとどまるためのPの増加分の関係を例3の$MRTS_B$で表し、Pが1単位減少したときNが同じ値にとどまるためのBの増加分の関係を例4の$MRTS_P$で表す。これらの関係式はαとβの比とPとBの比の積の形で示される。しかも$MRTS_B$と$MRTS_P$の乗算は1になる。このような結果から判断すると扱うべき生産関数がhomogeneousを前提にした場合はどの次数で対処しても構わないということを示している。

例3

$$MRTS_B = -\frac{dP}{dB} = -\left(-\frac{\partial N}{\partial B}\cdot\frac{\partial P}{\partial N}\right) = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{P}{B}$$

例4

$$MRTS_P = -\frac{dB}{dP} = -\left(-\frac{\partial N}{\partial P}\cdot\frac{\partial B}{\partial N}\right) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{B}{P}$$

4.2.3　投資利益関数

式(16)をそれぞれ例5や例6のようにBとPで偏微分する。対象の生産関数はこれまで取り扱ってきたBPの平方式とBPの乗算式である。両者の計算結果は式(20)のように同じ結果を得る。

例5

$$\frac{\partial R}{\partial B} = C_{u/I}\frac{1}{2}B^{-\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}} - w_B = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial P} = C_{u/I}\frac{1}{2}B^{\frac{1}{2}}P^{-\frac{1}{2}} - w_P = 0$$

例6

$$\frac{\partial R}{\partial B} = C_{u/I}P - w_B = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial P} = C_{u/I}B - w_P = 0$$

$$\frac{P}{B} = \frac{w_B}{w_P} \tag{20}$$

式(20)は弾力性の特性で示したMRTSの関係から式(21)のように表現でき、その内容は技術的代替率が生産要素の価格比に等しく費用最小点の条件形成を意味している。つまり利潤最大化条件から費用最小化条件が導出できるということになる。

$$\frac{w_B}{w_P} = \frac{MP_B}{MP_P} = MRTS \tag{21}$$

ここで投資利益関数RをBで偏微分する利潤最大化の1階条件とw_Bを用いて生産関数のグラフ的特徴を把握する。但し、生産関数は$F(B,P)=B^{\alpha}P^{\beta}$で定義する（Pでの偏微分や$w_P$の扱いは省略）。生産関数をBPの平方式で与えると例7が得られ、BPの乗算式で与えると例8が得られる。ここでk次同次の$\alpha+\beta=k$の関係から例7に示したベキ乗の傾向を調べるために①$2\alpha+2\beta>2$のケース、②$2\alpha+2\beta<2$のケース、③$2\alpha+2\beta=2$のケースを考える。評価の都合上$\alpha+\beta=1$は両辺2倍の形で扱う。さらに例8に示したベキ乗の傾向を調べるために④$\alpha+\beta>2$のケース、⑤$\alpha+$

β<2のケース、⑥$\alpha+\beta$=2のケースを考える。表３にB-P平面における傾きの傾向をイメージ表現するが、１次同次、２次同次ともに同じ傾向を示しているのがわかる。

例７
$$P=\left(\frac{C_{p/I}}{2\alpha C_{u/I}}\right)^{\frac{2}{2\beta-1}}B^{\frac{1-2\alpha}{2\beta-1}}$$

例８
$$P=\left(\frac{C_{p/I}}{\alpha C_{u/I}}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}B^{\frac{1-\alpha}{\beta-1}}$$

図18は、(α,β)の値としてBPの平方式と乗算式にそれぞれ逓増、逓減、一定の順で(0.1,1)と(0.2,2)、(0.2,0.75)と(0.4,1.5)、(0.2,0.8)と(0.4,1.6)を用い、$C_{p/I}=C_{u/I}$を前提に例７と例８の式を計算してグラフ化したものである。これらからわかることは、扱うべき生産関数は次数さえ把握していればPにおける平方式と乗算式の値は、ベキ関数Bの係数がそれぞれ逓増では２乗と１乗の関係、逓減では４乗と２乗の関係、一定では10/3乗と5/3乗の関係が成立するため、扱い易い関数を生産関数として検討することが可能であることを意味している。プロダクトライン開発では、$C_{p/I}<C_{u/I}$の条件を前提にROIを考慮する必要があり、この条件の特徴は例７や例８の式のベキ関数の係数を例９、例10に示すようなxとyで表現すると図19や図20のグラフで把握できる。

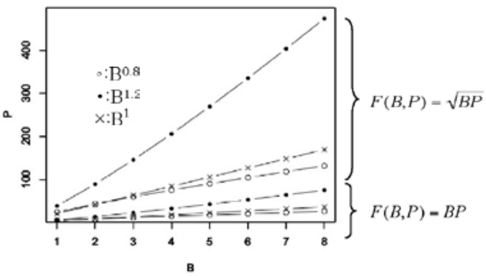

図18　傾きの傾向

例９
$$y=\left(\frac{1}{2\alpha}x\right)^{\frac{2}{2\beta-1}}$$

例10
$$y=\left(\frac{1}{\alpha}x\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

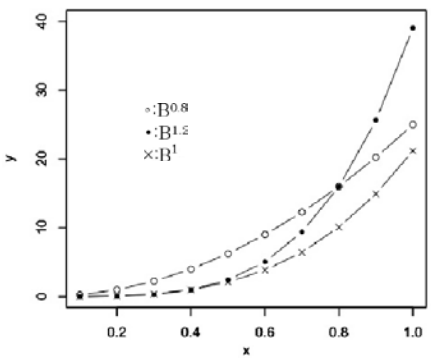

図19　ベキ関数の係数比較（$\sqrt{BP}$）

表３　ベキ関数のケース分け

１次同次ケース	２次同次ケース	例：Bのべき乗	B-P平面：傾きの傾向	１次同次：規模に関して収穫
① $1>\frac{1-2\alpha}{2\beta-1}$	④ $1>\frac{1-\alpha}{\beta-1}$	$B^{0.8}$	減る 	逓増
② $1<\frac{1-2\alpha}{2\beta-1}$	⑤ $1<\frac{1-\alpha}{\beta-1}$	$B^{1.2}$	増す 	逓減
③ $1=\frac{1-2\alpha}{2\beta-1}$	⑥ $1=\frac{1-\alpha}{\beta-1}$	B^{1}	一定 	一定

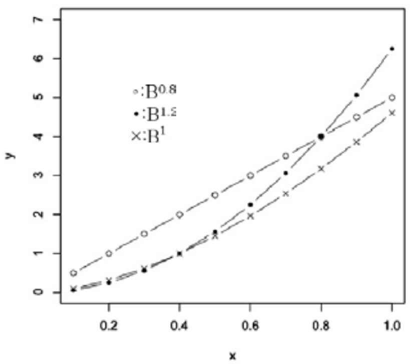

図20　ベキ関数の係数比較（BP）

実際に検討を加えた１次同次な生産関数の形はα=0.5とβ=0.5の③2α+2β＝２のケースであり、２次同次な生産関数の形はα＝１とβ＝１の⑥$\alpha+\beta$＝２のケースであり、いずれもB－P平面で一定を前提にしている。但し、これら（α,β）の値は例７や例８の式に使うと一部で局所不決定となるため、$C_{p/I}=C_{u/I}$のもとでは扱わないものとする。

現実問題として生産関数の形が常に一定を前提としていたのでは、世の中の生産活動を正しく把握しきれないというのは言うまでもない。単純明快な数式モデルとして捉えるためには一定や逓減などの前提はよいが、生産活動の系の複雑さへの対応としては不十分さが残る。

4.2.4　ラグランジュ乗数法による見解

式(22)の費用最小化問題にラグランジュ乗数法を適用する。式(23)のようにラグランジュ関数を構成し、極値の１階条件を施す。

$$\begin{aligned}&\min\ w_B B + w_P P + 1\\ &s.t.\quad N_i = B^{\alpha} P^{\beta} \quad 1 \le i \le n\end{aligned} \tag{22}$$

$$L = w_B B + w_P P + 1 + \lambda\left(N_i - B^{\alpha} P^{\beta}\right) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial B} &= w_B - \lambda\alpha B^{\alpha-1} P^{\beta} = 0\\ \frac{\partial L}{\partial P} &= w_P - \lambda\beta B^{\alpha} P^{\beta-1} = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= N_i - B^{\alpha} P^{\beta} = 0\end{aligned} \tag{24}$$

式(24)に示す３つの方程式を解いて以下のようなBとPを求める。

$$B = N_i^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w_P}{w_B}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \tag{25}$$

$$P = N_i^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w_B}{w_P}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \tag{26}$$

これら式(25)と式(26)に（α,β）の値が(0.5,0.5)の場合(BPの平方式)、(1,1)の場合(BPの乗算式）をそれぞれ処理してP÷Bを求めると平方式であろうが乗算式であろうが、式(20)と同一の式が得られる。さらにB×Pを求めるとBPの平方式の場合はN_iの２乗で表現され、BPの乗算式の場合はN_iの１乗で表現される。特にBPの乗算式の表現を式(27)に示す。この式は、式(13)の意味を数式的に証明した形となる。

$$B \times P = N_i \tag{27}$$

5．おわりに

今回はコブ-ダグラス生産関数の特性を統計データの加工から検討を加え、相関やαとβの値の持つ意味を再度見直すことを試みている。さらにコブ-ダグラス生産関数のプロダクトライン開発への導入、利潤やROIによる評価を行うために極値の１階条件を活用して１次同次と２次同次の関数の影響も調べている。これらの結果により同次関数の次数の違いは生産関数の出力に反映されるため、その出力量を管理できるのであれば操作し易い

あるいは検討し易いコブ-ダグラス生産関数の形をプロダクトライン開発に採用することが可能ということになる。システム開発のプロジェクトにおけるプロダクトライン開発の実現の可否を判断するときには、これまで取り上げてきたようにミクロエコノミックスの手法が使える。但し、プロダクトライン開発へコブ-ダグラス生産関数を導入しての投資案件の評価は粗い評価であり、Σを製品数Nで近似した点の精度の改良、プロダクトライン開発のコスト評価に逓増を絡めた精度の良い数式モデルの構築、つまり複雑系への対応など更なる検討が必要になる。

参考文献

[1] J.Felipe and F.G.Adams,「A THEORY OF PRODUCTION」THE ESTIMATION OF THE COBB-DOUGLAS FUNCTION:A RETROSPECTIVE VIEW, Eastern Economic Journal, Vol.31, pp.427-445, No.3, Summer 2005

[2] 永嶋浩,『日常に見るデータを処理する統計術 -因子分析てなーに-』, 茨城女子短期大学公開講座,2008年度春季講座資料, pp.2-4, 2008

[3] 小野進,『賃金決定メカニズムと社会関係』,立命館経済学, pp.503-508, 第44巻・第４・５号, 1995

[4] P.H.Douglas,COMMENTS ON THE COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION, Pin The Theory and Empirical analysis of Production, pp.15-22, 1967

[5] 丸山徹,『新講 経済原論 第二版』, 岩波書店, p150, 2006

[6] 西村和雄,『ミクロ経済学入門 第２版』, 岩波書店, p112, 1995

[7] P.C.Clements and L.M.Northrop, Software Product Line: Practices and Patterns, Addison-Wesley, 2001.（ 前田卓雄訳,『ソフトウェアプロダクトライン』, 日刊工業新聞社, pp.272-274, 2003）

[8] 永嶋浩,『プロダクトライン開発におけるROI計算の一考察 -「クマのプーさん」のコア資産モデル-』, 埼玉学園大学紀要経営学部篇, pp.201-213, 第９号, 2009

[9] 永嶋浩,『プロダクトライン開発におけるコスト評価モデル』, 情報処理学会創立50周年記念（第72回）全国大会論文集, pp.313-314, 2010